جامعة البعث | مقرر نظرية الجبور | المدة: ساعة ونصف
كلية العلوم | السنة الرابعة رياضيات (جبر) | الدرجة: ١٠٠
قسم الرياضيات | الفصل الأول ٢٠١٦ – ٢٠١٧ | اسم الطالب:

السؤال الأول:

ليكن A جبراً فوق الحلقة التبديلية والواحدية R. والمطلوب:

١ – لتكن B مجموعة جزئية غير خالية في A. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون B جبراً جزئياً في A هو أن تتحقق الشروط الآتية: أياً كان $\alpha, \beta \in R$ وأياً كان $a,b \in B$ فإن:

$$\alpha a + \beta b \in B,\ ab \in B$$

٢ – أثبت أنه أياً كان $a \in A$ فإن العلاقة $d_a : A \to A$ المعرفة بالشكل الآتي $d_a(x) = ax - xa$ وذلك أياً كان $x \in A$ هي تطبيق اشتقاق على A. ثم أثبت أن $Ker(d_a)$ تشكل جبراً جزئياً في A.

السؤال الثاني:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R. والمطلوب:

١ – عرف كلاً من المثالي التام والمثالي المميز في A.

٢ – إذا كان B مثالياً قابلاً للحل في A وكان جبر لي الخارج A/B نصف بسيط، أثبت أن $B = J(A)$.

٣ – لنفرض أن R حقلاً. أثبت أنه لأجل كل مثالي تام B في A فإن $A = B \oplus Z_A(B)$.

السؤال الثالث:

أثبت أن كل جبر لي A بعده يساوي 3 فوق حقل ما K قاعدته المجموعة $\{e_1, e_2, e_3\}$ تحقق الشروط الآتية:

$$[e_1, e_2] = ae_1,\ [e_1, e_3] = be_1,\ [e_2, e_3] = ce_1 - fbe_2 + fae_3$$

حيث $a,b,c,f \in K$ عناصر مغايرة للصفر، يكون قابلاً للحل.

السؤال الرابع:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R. والمطلوب:

١ – أثبت أن مجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلية $Inn(A) = \{d_a : a \in A\}$ تشكل مثاليةً في $Der(A)$.

٢ – أثبت أن المجموعة $Z(A) = \{a : a \in A;\ [a,z] = 0,\ \forall z \in A\}$ تشكل مثالياً مميزاً في A.

٣ – أثبت أن $A/Z(A) \cong Inn(A)$، أي أن جبر لي الخارج $A/Z(A)$ يماثل $Inn(A)$.

انتهت الأسئلة

حمص في ٤ / ٢ / ٢٠١٧ — د. حمزة حاكمي

رياضيات ٤ س (7)

[illegible]

[illegible]

الفصل الثاني [illegible]

السؤال الأول: [illegible] (٨ + ٧ + ٨)

1- لنفرض أن الشرط [illegible] محقق، ولنبرهن أن [illegible]
أي أنه من أجل $a,b\in B$ من أجل $\alpha=\beta=1$ نجد أن $a+b\in B$ أي أن B مغلقة بالنسبة لعملية الجمع. النظير لكل $a=b$ ومن أجل $\alpha=1, \beta=-1$ نجد أن $0=a-a\in B$. ومن أجل $\alpha=1, \beta=-1$ نجد أن $a-b\in B$ ومنه فإن $(B,+)$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(A,+)$ وبالتالي زمرة تبديلية. من جهة أخرى، من أجل $\beta=0$ نجد أن $\alpha a\in B$ ومنه فإن B فضاء جزئي من A [illegible] $a\cdot b\in B$ أياً كان $a,b\in B$ ليبين أن B مغلقة بالنسبة للضرب ومنه فإن B تشكل جبراً جزئياً في A. (٧ د)

2- ليكن $a,b\in A$ عندئذ نجد أن

$$d_a(x+y)=a(x+y)-(x+y)a$$
$$=ax+ay-xa-ya=(ax-xa)+(ay-ya)=d_a(x)+d_a(y)$$
$$d_a(\alpha x)=a(\alpha x)-(\alpha x)a=\alpha(ax)-\alpha(xa)=\alpha(ax-xa)=\alpha d_a(x)$$
$$d_a(x\cdot y)=a(x\cdot y)-(xy)a=(ax)y-x(ya)=(ax)y-(xa)y+$$
$$+(xa)y-x(ya)=(ax-xa)y+x(ay-ya)=d_a(x)\cdot y+x d_a(y)$$

ومنه فإن d_a تطبيق اشتقاق على A. (١٣ د)

واضح أن $Ker(d_a)\subseteq A$ وأن $Ker(d_a)\neq\phi$ لأن $0\in Ker(d_a)$. ليكن $\alpha,\beta\in R$ وأن $x,y\in Ker(d_a)$ ، عندئذ نجد أن

$$d_a(\alpha x+\beta y)=a(\alpha x+\beta y)-(\alpha x+\beta y)a=a(\alpha x)+a(\beta y)$$
$$-(\alpha x)a-(\beta y)a=a(\alpha x)-(\alpha x)a+a(\beta y)-(\beta y)a=$$
$$=d_a(\alpha x)+d_a(\beta y)=\alpha d_a(x)+\beta d_a(y)=0$$
$$d_a(x\cdot y)=d_a(x)\cdot y+x d_a(y)=0$$

ومنه فإن $Ker(d_a)$ جبر جزئي من A.

السؤال الثاني: [illegible] (١٥ + ١٠ + ١٥)

1- لتكن B مثالي في A [illegible] إذا كان $Z(B)=0$ وأن $Der(B)=Inn(B)$ في B [illegible] d إنه [illegible] إذا كان $d(B)\subseteq B$ وذلك لأجل كل $d\in Der(A)$. (١٥ د)

2- لنفرض أن المثالي B [illegible] في A. عندئذ فإن $B+J(A)$ يكون مثالياً [illegible] من A ومنه فإن جبر القسمة $\frac{B+J(A)}{B}$ يكون مثالياً [illegible] في $\frac{A}{B}$ ويكون $\frac{A}{B}$ نصف بسيط نجد أن $B+J(A)=B$ وبالتالي يكون $J(A)\subseteq B$ ولكون $J(A)$ [illegible] في A نجد أن $B\subseteq J(A)$ وهكذا نجد أن $B=J(A)$. (١٠ د)

3- لنبرهن أولاً أن $A=B+Z_A(B)$: إن كلاً من $Z_A(B)$ و B مثالي في A ومنه فإن $B+Z_A(B)$ مثالي في A وبالتالي $B+Z_A(B)\subseteq A$ من جهة أخرى، بما أن المثالي B تام فإن $Z(B)=0$ وأن $Der(B)=Inn(B)$. ليكن $a\in A$ عندئذ نوجد تطبيق اشتقاق داخلي $d_a:A\to A$ معرفاً بالشكل $d_a(x)=[a,x]$ وذلك أياً كان $x\in A$.

سلم لك

نعتبر d'_a حصر d_a على B حيث أن $d'_a : B \to A$

بما أن B مثالي في A فإن $d_a(B) \subseteq B$ وبالتالي أياً كان $x \in B$ فإن

$d'_a(x) = d_a(x) \in B$ وهذا يبين أن $d'_a : B \to B$ ، لنبرهن أن

d'_a هو اشتقاق على B . نختار $x, y \in B$ نجد أن

$d'_a([x,y]) = d_a([x,y]) = [a,[x,y]] = -[[a,x],y] + [x,[a,y]]$

$= [d_a(x),y] + [x, d_a(y)] = [d'_a(x),y] + [x, d'_a(y)]$

ينتج أن $d' \in Inn(B) = Der(B)$ وهذا يبين أنه أياً كان $a \in A$ يوجد

$b \in B$ بحيث $d_a = d_b$ على B ومنه أياً كان $x \in B$ فإن $d_a(x) = d_b(x)$

أي أن $[a,x] - [b,x] = 0$ ومنه يكون $[a-b,x] = 0$ وبما أن

$a - b \in A$ فإن $a - b \in Z(B)$ ومنه فإن $a \in B + Z_A(B)$ أي أن

$A \subseteq B + Z_A(B)$ ومنه فإن $A = B + Z_A(B)$ ،

لكن $B \cap Z_A(B) \subseteq Z(B) = 0$ ومنه فإن $A = B \oplus Z_A(B)$.

السؤال الثالث . ١٥ درجة

ليكن $z \in DA = [A,A]$ عندئذ يوجد $x, y \in A$ بحيث أن $z = [x,y]$ ، إن

$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, $y = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3$

حيث $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in K$. ثوابت

$z = [x,y] = \alpha\beta'[e_1,e_2] + \alpha\gamma'[e_1,e_3] + \beta\alpha'[e_2,e_1] + \beta\gamma'[e_2,e_3]$

$+ \gamma\alpha'[e_3,e_1] + \gamma\beta'[e_3,e_2]$.

٢ درجات

$z = [x,y] = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)[e_1,e_2] + (\alpha\gamma' - \gamma'\alpha)[e_1,e_3] + (\beta\gamma' - \gamma\beta')[e_2,e_3]$

$z = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\, a e_1 + (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)\, b e_1 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)(c e_1 - f b e_2 + f a e_3)$

$z = \lambda e_1 + \mu e'$

حيث $\lambda = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)a + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')b + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)c$ ثوابت

$\mu = (\beta\gamma' - \beta'\gamma) f$, $e' = a e_3 - b e_2$

وهذا يبين أن DA مولد بـ $\{e_1, e'\}$ ، لنبرهن على أن $D^2A = 0$

ليكن $z \in D^2A = [DA, DA]$ عندئذ $z = [x,y]$ حيث $x, y \in DA$ إذ

$x = \lambda e_1 + \mu e'$, $y = \lambda_1 e_1 + \mu_1 e'$ ٥ درجات

حيث $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1 \in K$ ثوابت

$z = [x,y] = [\lambda e_1 + \mu e', \lambda_1 e_1 + \mu_1 e'] = \lambda\mu_1[e_1,e'] + \mu\lambda_1[e',e_1]$

$= (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)[e_1,e'] = (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)[e_1, a e_3 - b e_2]$

$= (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(a[e_1,e_3] - b[e_1,e_2]) =$

$= (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(ab e_1 - ab e_1) = 0$

وهذا يبين أن $D^2A = 0$ وبالتالي فإن A قابل للحل ،

السؤال الرابع ، ٣٥ درجة (١٢ - ٧ + ١٦)

١ - واضح أن $\phi \neq Inn(A) \subseteq Der(A)$ لأن $0 \in A$ وبالتالي $d_0 \in Inn(A)$ ، ليكن

$d_a, d_b \in Inn(A)$ حيث $a, b \in A$ ، عندئذ أياً كان $x \in A$ فإن

$(d_a - d_b)(x) = d_a(x) - d_b(x) = [a,x] - [b,x] = [a-b,x] = d_{a-b}(x)$ ٢ درجة

وبما أن $a - b \in A$ نجد أن $d_a - d_b = d_{a-b} \in Inn(A)$.

أياً كان $\alpha \in R$ فإن $(\alpha d_a)(x) = \alpha . d_a(x) = \alpha[a,x] = [\alpha a, x] = d_{\alpha a}(x)$

وبما أن $\alpha a \in A$ نجد أن $\alpha d_a = d_{\alpha a} \in Inn(A)$ مما سبق نجد أن

$Inn(A)$ تشكل مودولاً جزئياً من $Der(A)$ ،

(ب) ليكن $D \in Der(A)$ و $d_a \in Inn(A)$ حيث $a \in A$، لإثبات أن
$[D, d_a] \in Inn(A)$، أي أن لكل $x \in A$ فإن

$$[D, d_a](x) = (D d_a - d_a D)(x) = D\, d_a(x) - d_a D(x)$$
$$= D[a, x] - d_a(D(x)) = [D(a), x] + [a, D(x)] - [a, D(x)]$$
$$= [D(a), x] = d_{D(a)}(x)$$

وبما أن $D(a) \in A$ فإن $[D, d_a] = d_{D(a)} \in Inn(A)$،
ينتج أن $Inn(A)$ مثالي في $Der(A)$.

٢- (ج) نعلم أن $\phi \neq Z(A) \subseteq A$ حيث لكل $z \in A$ فإن $[0, z] = 0$ ومنه $0 \in Z(A)$، ليكن $a, b \in Z(A)$ عندئذٍ لكل $z \in A$ فإن

$$[a-b, z] = [a, z] - [b, z] = 0$$

ومنه $a-b \in Z(A)$، أيضاً لكل $\alpha \in R$ فإن $[\alpha a, z] = \alpha[a, z] = \alpha 0 = 0$ ومنه $\alpha a \in Z(A)$. لنبرهن أن $d(a) \in Z(A)$، أي لكل $z \in A$

$$[d(a), z] = d[a, z] - [a, d(z)] = d(0) - 0 = 0$$

ومنه $Z(A)$ مثالي في A.

٣- لتكن الدالة $\psi : A \to Inn(A)$ المعرفة بـ $\psi(a) = d_a$ لكل $a \in A$
إن ψ هومومورفيزم جبري، لكل $a, b \in A$ فإن $\psi(a+b) = d_{a+b}$

$$\forall x \in A,\ d_{a+b}(x) = [a+b, x] = [a, x] + [b, x] = d_a(x) + d_b(x) = (d_a + d_b)(x)$$

ومنه $d_{a+b} = d_a + d_b$ أي أن $\psi(a+b) = d_{a+b} = d_a + d_b = \psi(a) + \psi(b)$

$$\forall \alpha \in R;\ \psi(\alpha a) = d_{\alpha a},\ \forall x \in A,\ d_{\alpha a}(x) = [\alpha a, x] = \alpha[a, x] = \alpha d_a(x)$$

أي أن $d_{\alpha a} = \alpha d_a$ ومنه $\psi(\alpha a) = d_{\alpha a} = \alpha d_a = \alpha \psi(a)$
أيضاً $a, b \in A$ فإن $\psi([a, b]) = d_{[a,b]}$ ومنه

$$\forall x \in A,\ d_{[a,b]}(x) = [[a, b], x] = -[x, [a, b]] = [a, [b, x]] + [b, [x, a]] = [a, d_b(x)] + [d_a(x), b] = d_a(d_b(x)) - [b, d_a(x)]$$
$$= d_a d_b(x) - d_b d_a(x) = (d_a d_b - d_b d_a)(x)$$

ومنه نجد أن $\psi[a, b] = d_{[a,b]} = [d_a, d_b] = [\psi(a), \psi(b)]$
وهذا يبين أن ψ تشاكل جبري، وهو غامر لأنه إذا كان $d_c \in Inn(A)$ فإن $c \in A$ وأن $\psi(c) = d_c$، وحسب مبرهنة التشاكل الأولى فإن $\frac{A}{Ker(\psi)} \cong Inn(A)$، لنبرهن أن $Ker(\psi) = Z(A)$،
ليكن $a \in Ker(\psi)$ عندئذٍ يكون $\psi(a) = d_a = 0$ ومنه يكون أياً كان $x \in A$ فإن $d_a(x) = [a, x] = 0$ وبالتالي يكون $a \in Z(A)$ أي أن $Ker(\psi) \subseteq Z(A)$
ليكن $b \in Z(A)$ عندئذٍ أياً كان $y \in A$ فإن $d_b(y) = [b, y] = 0$ ومنه $d_b = 0$ أي أن $\psi(b) = d_b = 0$ أي أن $b \in Ker(\psi)$ ومنه نجد أن $Z(A) \subseteq Ker(\psi)$ ومنه $Ker(\psi) = Z(A)$.